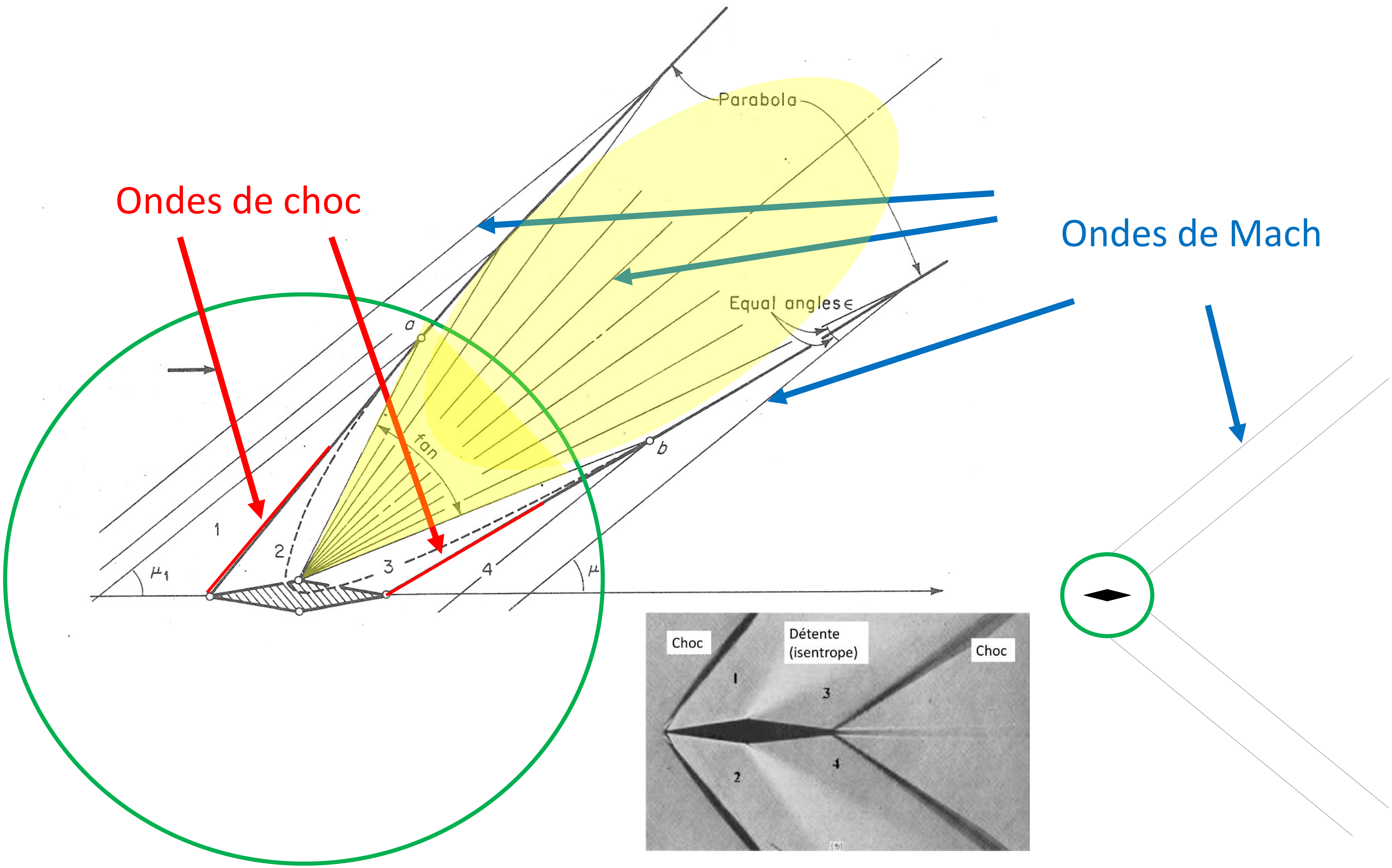
Mécanique des Fluides Compressibles
Méthode des caractéristiques

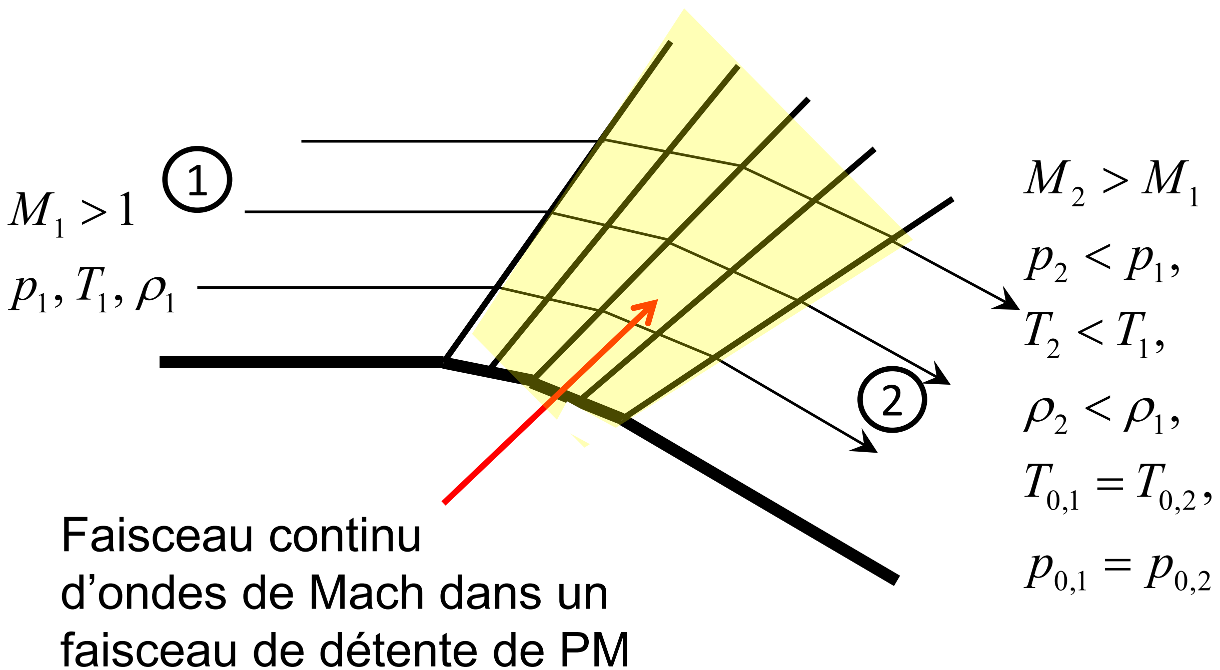
Dr. Flavio NOCA

Semestre printemps 2024-2025

Exemples

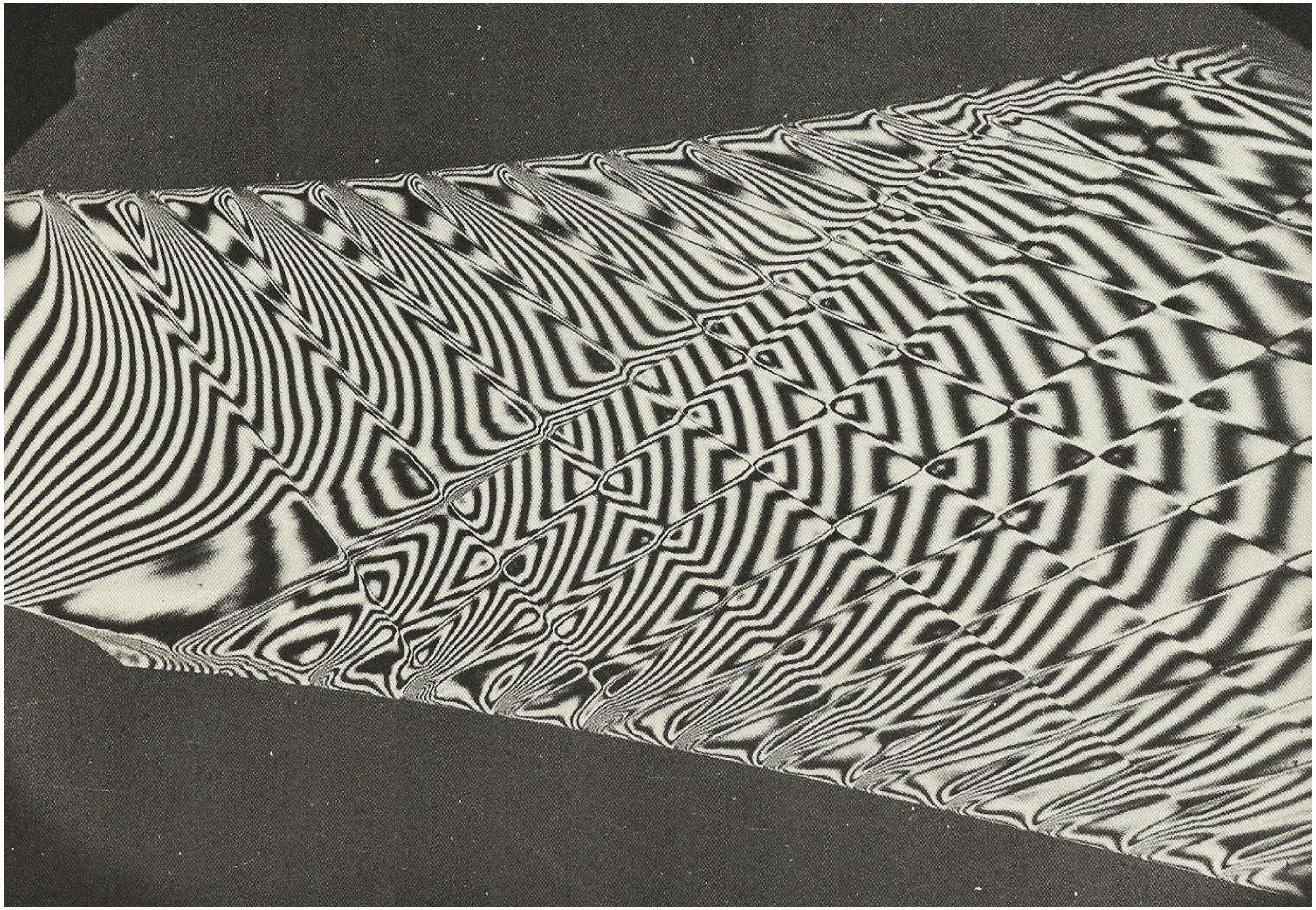

Ondes de choc
Ondes de Mach
Parabola
Equal angles ε
fan
a
b
1
2
3
4
μ_1
μ
Choc
Détente
(isentrope)
Choc
1
2
3
4

Exemples



$M_1 > 1$
1
p_1, T_1, ρ_1
2
$M_2 > M_1$
$p_2 < p_1,$
$T_2 < T_1,$
$\rho_2 < \rho_1,$
$T_{0,1} = T_{0,2},$
$p_{0,1} = p_{0,2}$
Faisceau continu
d'ondes de Mach dans un
faisceau de détente de PM

Exemples



Equations de conservation

- **Hypothèses:**
  - Ecoulements supersoniques
  - Bidimensionnels
  - Stationnaires
  - Homentropiques (entropie uniforme)
  - Enthalpie totale uniforme
  - Irrotationnels
  - Pas de forces volumiques extérieures

Formes générales

- Conservation de la masse: $$\nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \right) = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement par la loi de Crocco:

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$dh = Tds + v dp$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \right) = -\nabla h_0 + T \nabla s + \mathbf{f}$$

$$-\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla h_0 = T \nabla s$$

- Conservation de l'énergie

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h_0 = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla s = 0$$

Irrotationalité

- On ne considérera que des écoulements irrotationnels $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$

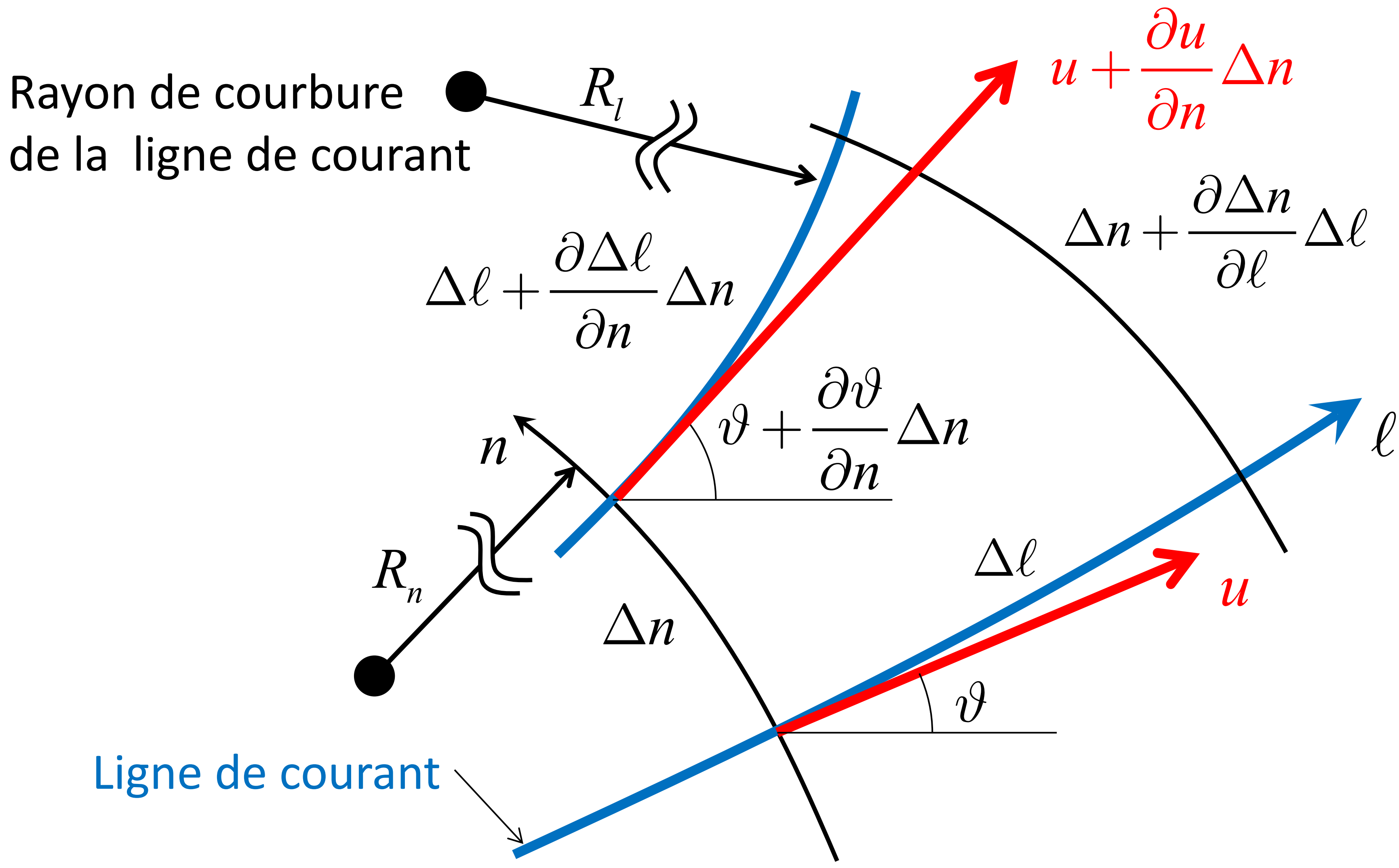
- L'entropie est choisie comme étant UNIFORME = écoulement homentropique

- L'enthalpie totale est choisie comme étant UNIFORME

- Deux de ces conditions impliquent l'autre, car:

$$-\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla h_0 = T \nabla s$$

- Hypothèses valables, faites jusqu'à présent (avec les ondes de chocs, l'entropie était uniforme en amont et en aval du choc)
- Hors des couches limites ou des sillages
- Pas de chocs courbes

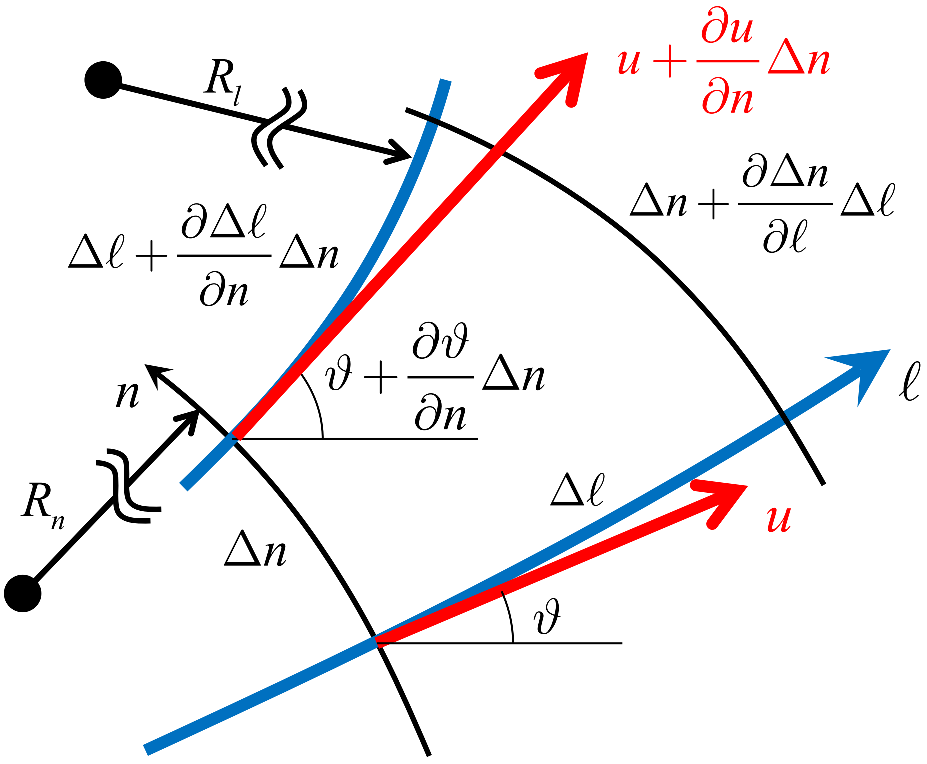

Rayon de courbure
de la ligne de courant
R_l
$u + \frac{\partial u}{\partial n}\Delta n$
$\Delta n + \frac{\partial \Delta n}{\partial \ell}\Delta \ell$
$\Delta \ell + \frac{\partial \Delta \ell}{\partial n}\Delta n$
$\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\Delta n$
n
ℓ
R_n
$\Delta \ell$
u
Δn
ϑ
Ligne de courant

Nouvelle formulation

- Coordonnées «naturelles», basées sur les lignes de courant
- Vecteur vitesse défini par le module de sa vitesse u et son angle ϑ

$$u, \vartheta$$

$$u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$



$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{\Delta n} \frac{\partial \Delta n}{\partial \ell} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n}$$

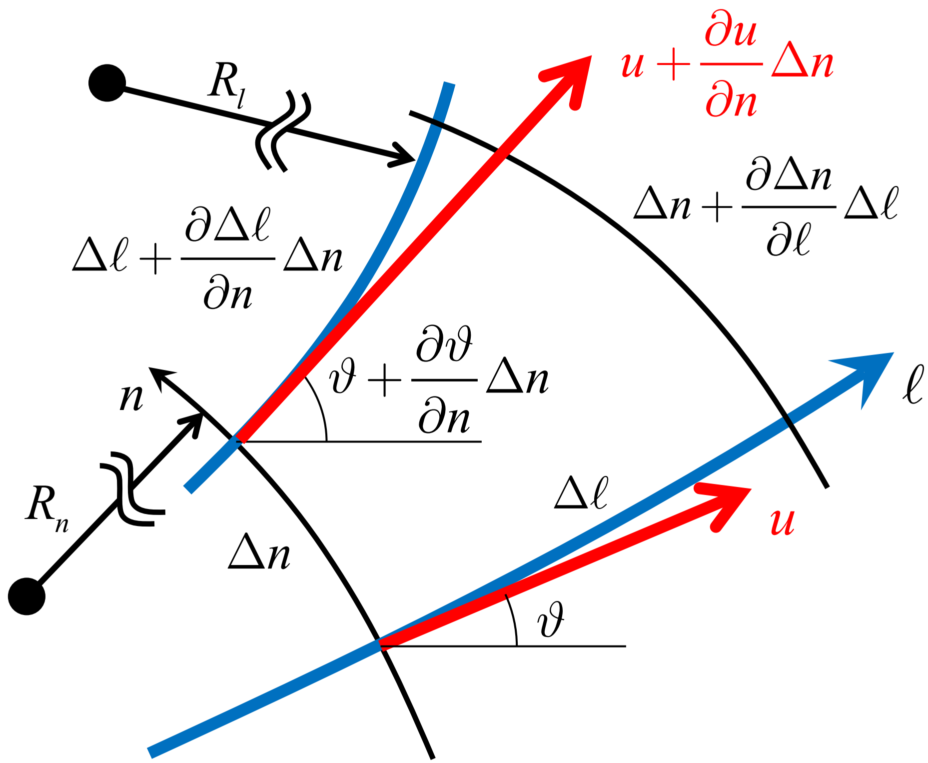
$$\frac{1}{R_l} = -\frac{1}{\Delta \ell} \frac{\partial \Delta \ell}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell}$$

- Conservation de la masse

$$\rho u \Delta n = const$$

- Dérivée logarithmique

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \ell} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$$



$$\frac{1}{\Delta n}\frac{\partial \Delta n}{\partial \ell} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \quad \left(= \frac{1}{R_n}\right)$$

- Conservation de la quantité de mouvement selon la ligne de courant

$$u\frac{\partial u}{\partial \ell} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \ell}$$

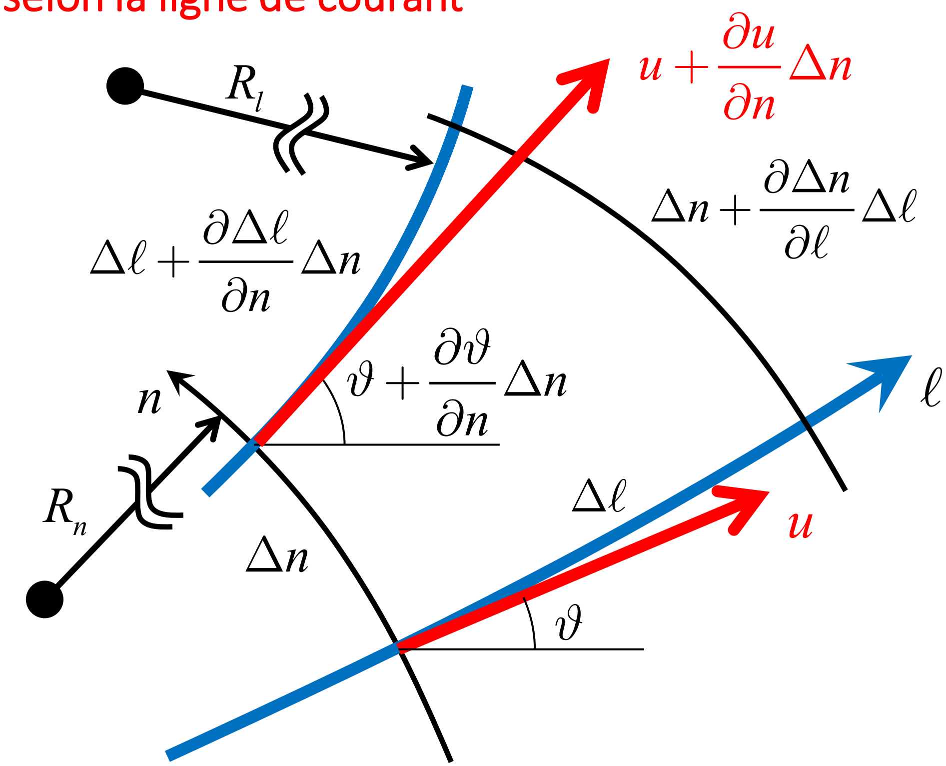
- Or $\quad dp = a^2 d\rho$

$$u\frac{\partial u}{\partial \ell} = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \ell}$$

- Avec conservation de masse

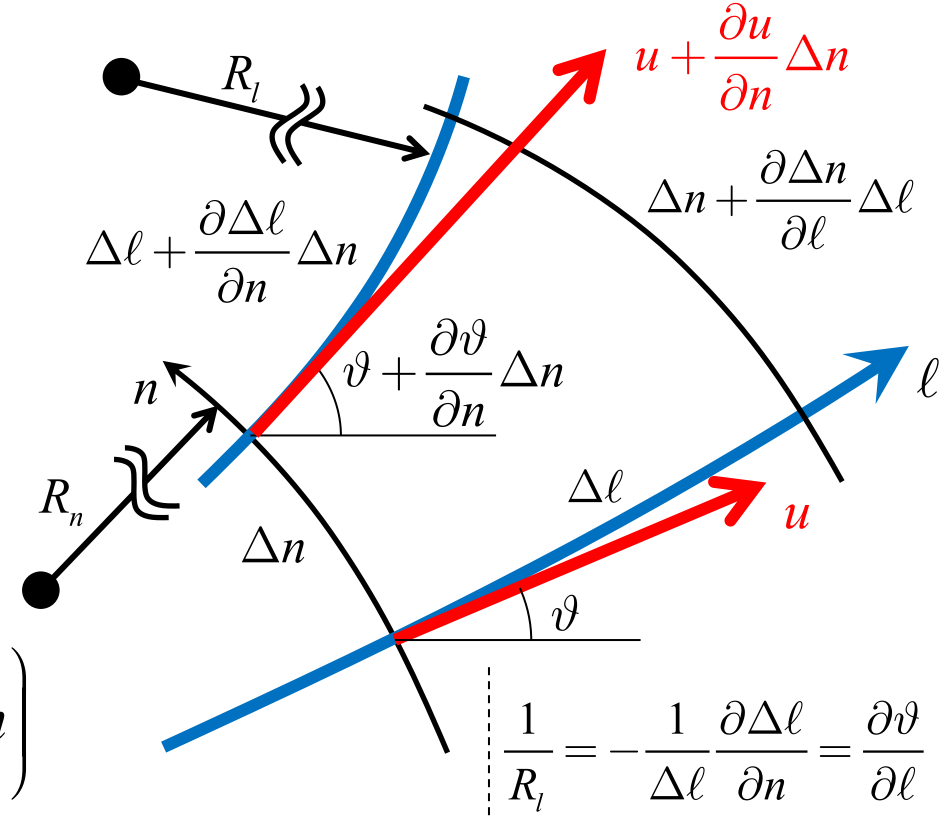
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \ell} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \ell} + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$$

$$\left(M^2 - 1\right)\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$$



- Théorème de Stokes

$$\iint \omega \, dS = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$$



$$\iint \omega \, dS \sim \omega \cdot \Delta n \cdot \Delta \ell$$

$$\iint \omega \, dS$$

$$\sim u\Delta \ell - \left(u + \frac{\partial u}{\partial n}\Delta n\right)\left(\Delta \ell + \frac{\partial \Delta \ell}{\partial n}\Delta n\right)$$

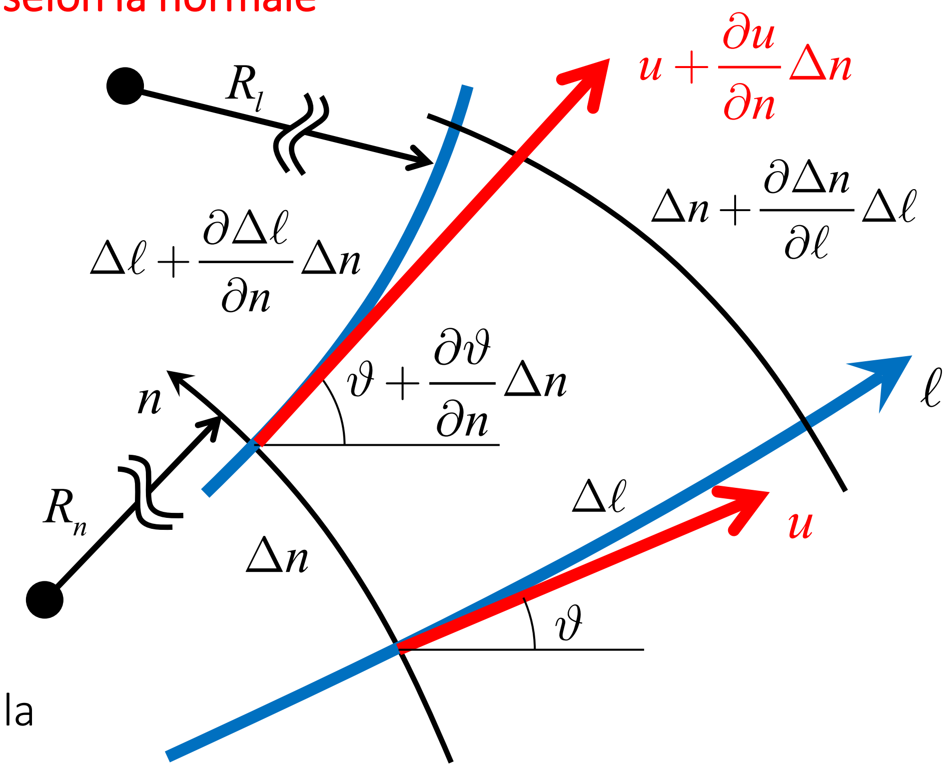
$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial n} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial \ell}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement selon la normale

$$\frac{u^2}{R_l} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$u^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$



- On peut montrer qu'elle est équivalente à la conservation d'énergie et à la condition d'irrotationnalité

$$\frac{1}{R_l} = -\frac{1}{\Delta \ell}\frac{\partial \Delta \ell}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \ell}$$

- Elle est donc superflue

Caractéristiques de l'écoulement

- Etant données les nombreuses contraintes (homentropie, irrotationnalité, enthalpie totale constante, écoulement permanent, fluide non visqueux), deux équations suffisent pour décrire l'écoulement

$$-\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\partial \vartheta}{\partial \ell}=0$$

$$\left(M^2-1\right)\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \ell}-\frac{\partial \vartheta}{\partial n}=0$$

- On introduit l'angle de l'onde de Mach μ

$$\tan\mu=\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$$

- On trouve alors

$$-\tan\mu\frac{\sqrt{M^2-1}}{u}\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\ell}=0$$

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{u}\frac{\partial u}{\partial\ell}-\tan\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial n}=0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\partial\vartheta}{\partial\ell}=0$$

$$\tan\mu=\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$$

$$\left(M^2-1\right)\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial\ell}-\frac{\partial\vartheta}{\partial n}=0$$

- On rappelle la définition de la fonction de Prandtl-Meyer

$$d\nu=\sqrt{M^2-1}\frac{du}{u}$$

- On trouve alors

$$-\tan\mu\frac{\partial\nu}{\partial n}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\ell}=0$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial\ell}-\tan\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial n}=0$$

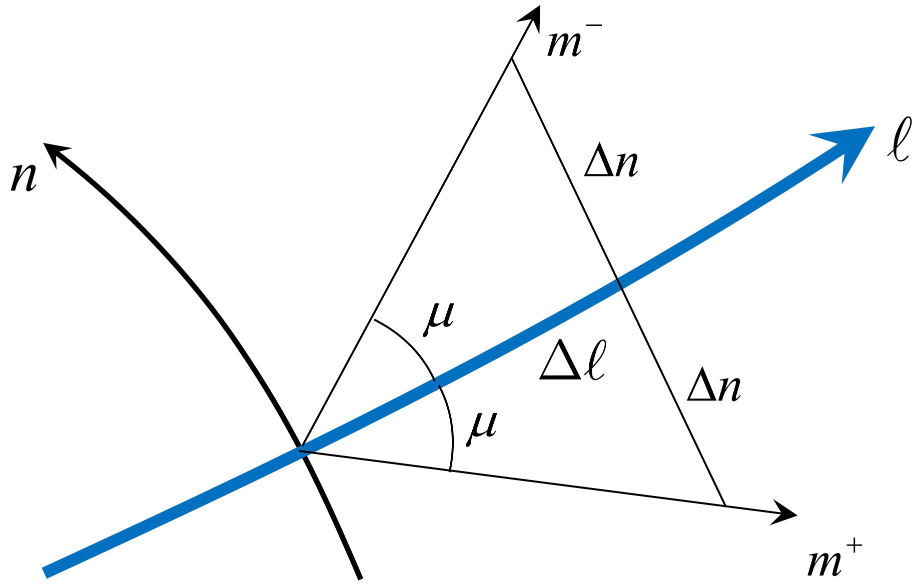
- En soustrayant et en aditionnant

$$\left(\frac{\partial}{\partial\ell}+\tan\mu\frac{\partial}{\partial n}\right)(\nu-\vartheta)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\ell}-\tan\mu\frac{\partial}{\partial n}\right)(\nu+\vartheta)=0$$

- Soit une fonction F(l,n)

$$\frac{dF}{dm^-} = \frac{\partial F}{\partial \ell}\frac{\partial \ell}{\partial m^-} + \frac{\partial F}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial m^-}$$



- Relations géométriques

$$\frac{d\ell}{dm^-} = \cos\mu \qquad \frac{dn}{dm^-} = \sin\mu$$

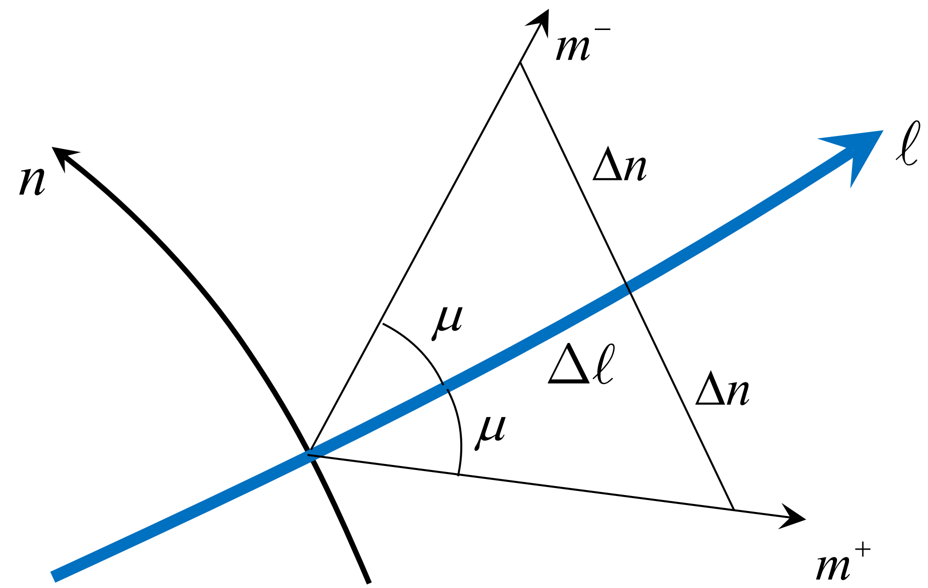
$$\frac{dF}{dm^-} = \cos\mu\left(\frac{\partial F}{\partial \ell} + \tan\mu\frac{\partial F}{\partial n}\right)$$

$$\frac{dF}{dm^+} = \cos\mu\left(\frac{\partial F}{\partial \ell} - \tan\mu\frac{\partial F}{\partial n}\right)$$

- On trouve alors

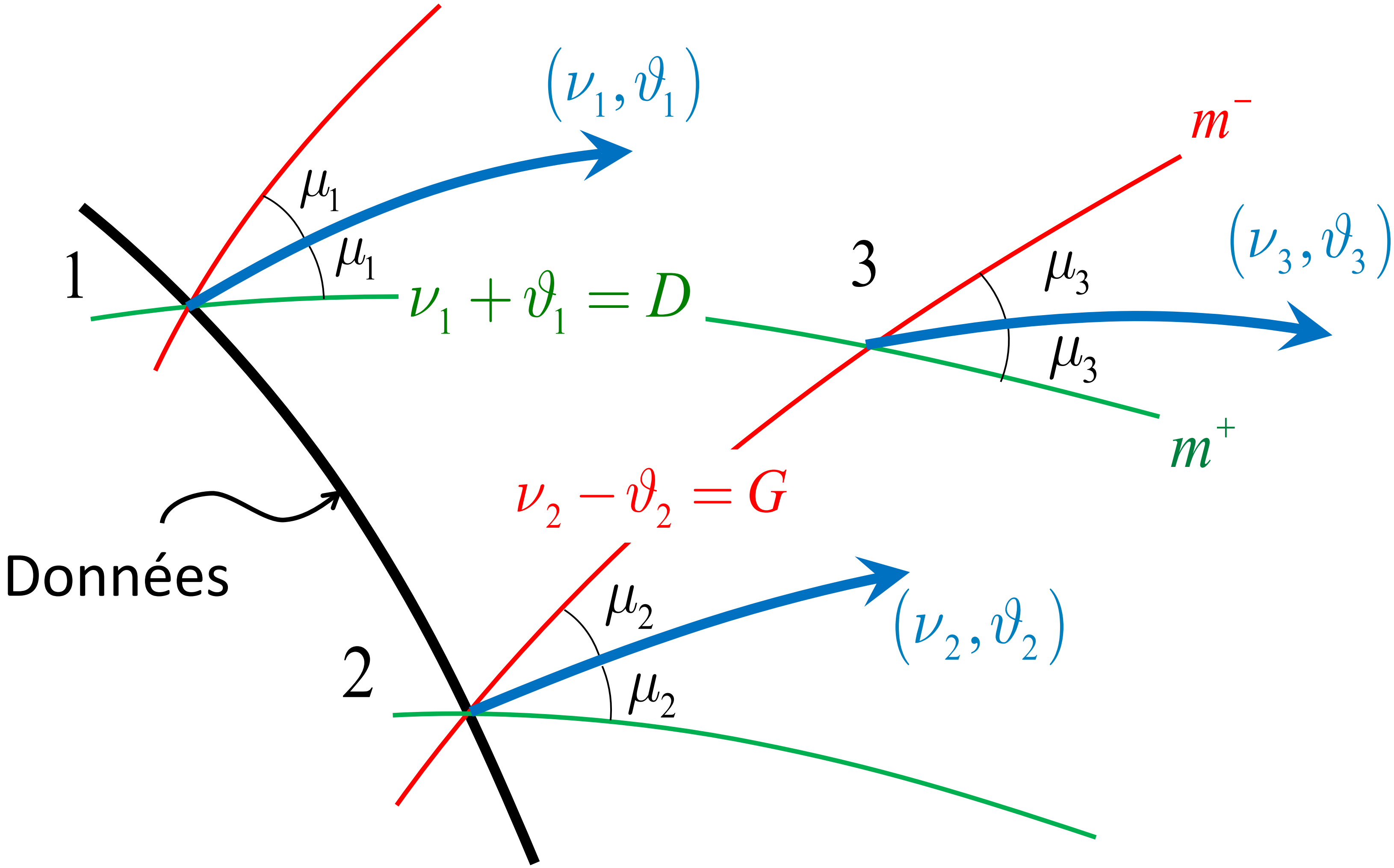
$$\frac{d}{dm^-}(\nu - \vartheta) = 0$$

$$\frac{d}{dm^+}(\nu + \vartheta) = 0$$



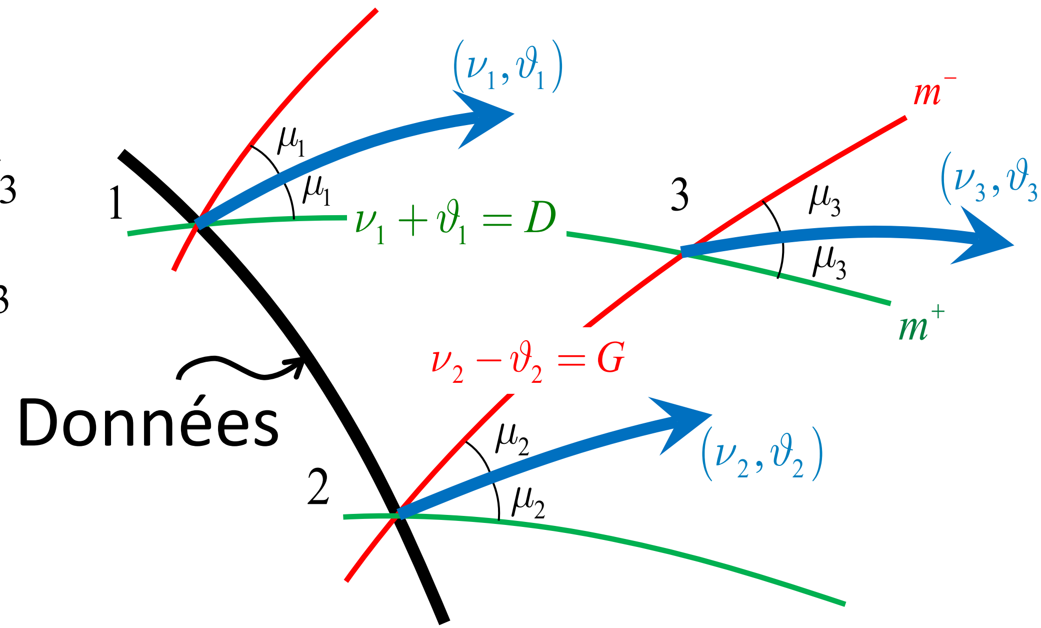
$\nu - \vartheta = const = G$ le long de la caractéristique m^-

$\nu + \vartheta = const = D$ le long de la caractéristique m^+


(ν_1, ϑ_1)
m^-
μ_1
μ_1
1
$\nu_1 + \vartheta_1 = D$
3
μ_3
(ν_3, ϑ_3)
μ_3
m^+
$\nu_2 - \vartheta_2 = G$
Données
μ_2
(ν_2, ϑ_2)
2
μ_2

$$G_2 = \nu_2 - \vartheta_2 = G_3 = \nu_3 - \vartheta_3$$

$$D_1 = \nu_1 + \vartheta_1 = D_3 = \nu_3 + \vartheta_3$$

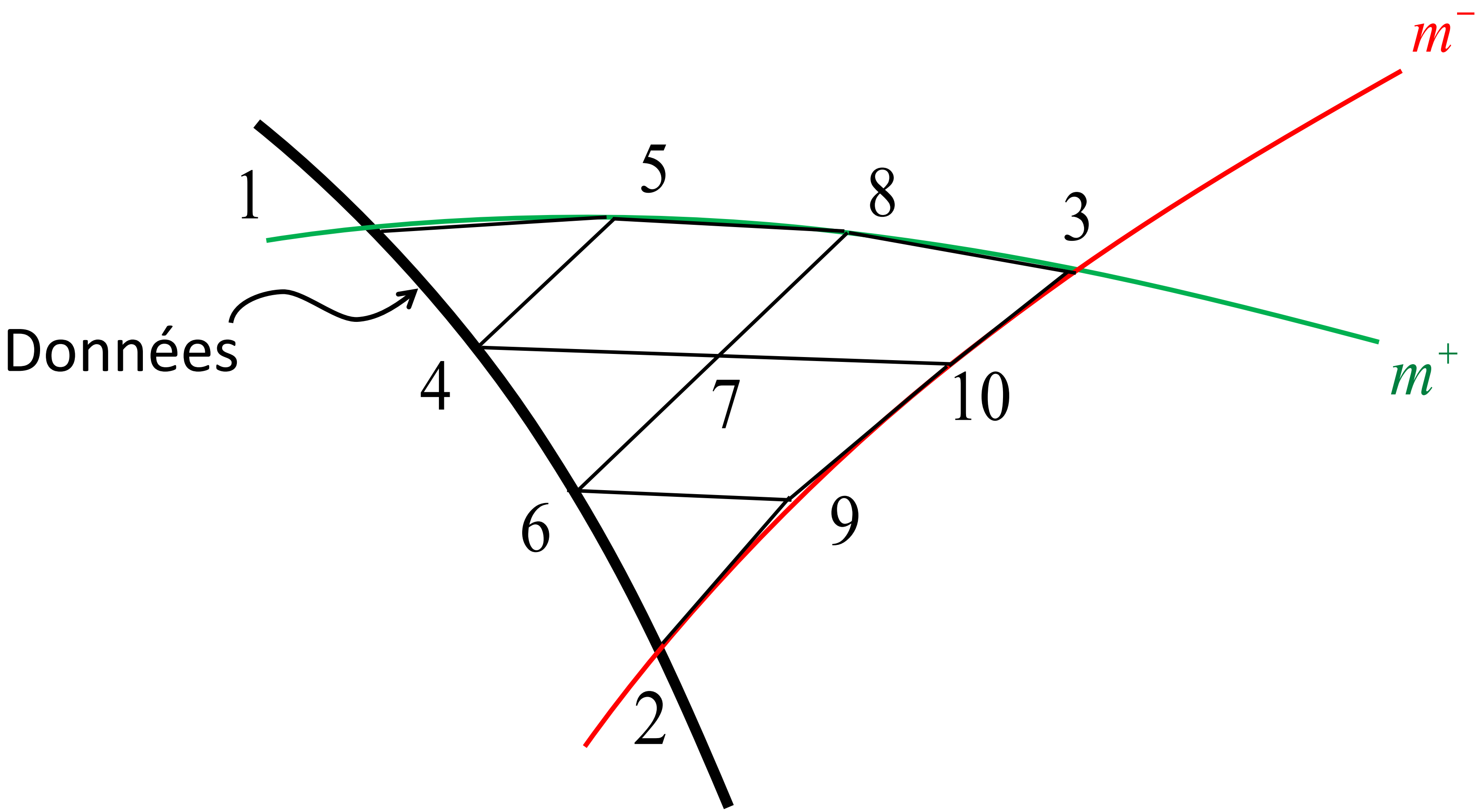


$$\nu_3 = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \qquad \nu = \frac{1}{2}(D + G)$$

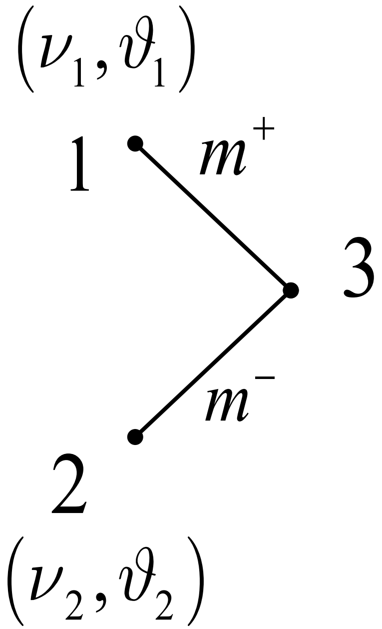
$$\vartheta_3 = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2) + \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \qquad \vartheta = \frac{1}{2}(D - G)$$

Méthode de calcul

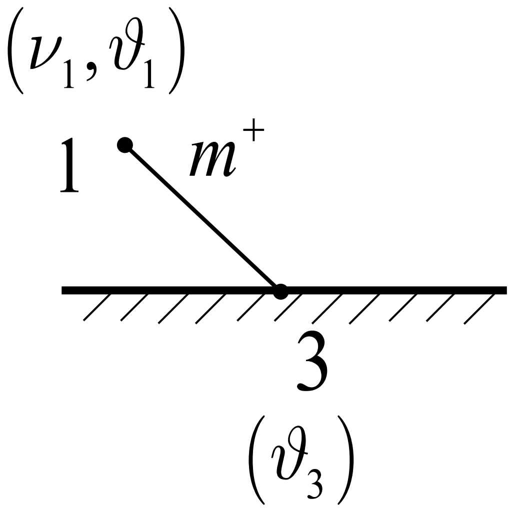
- Problème: on ne connaît pas a priori les caractéristiques!



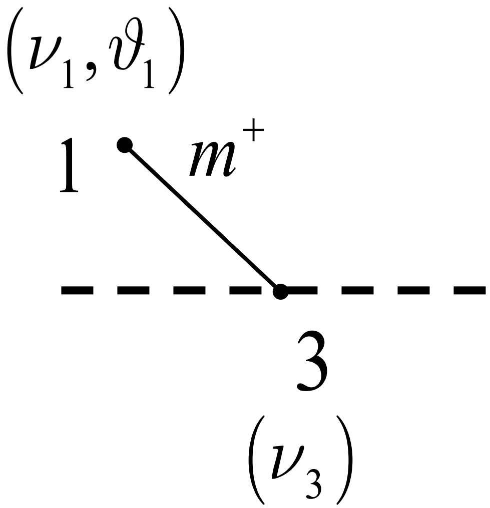
- Point intérieur

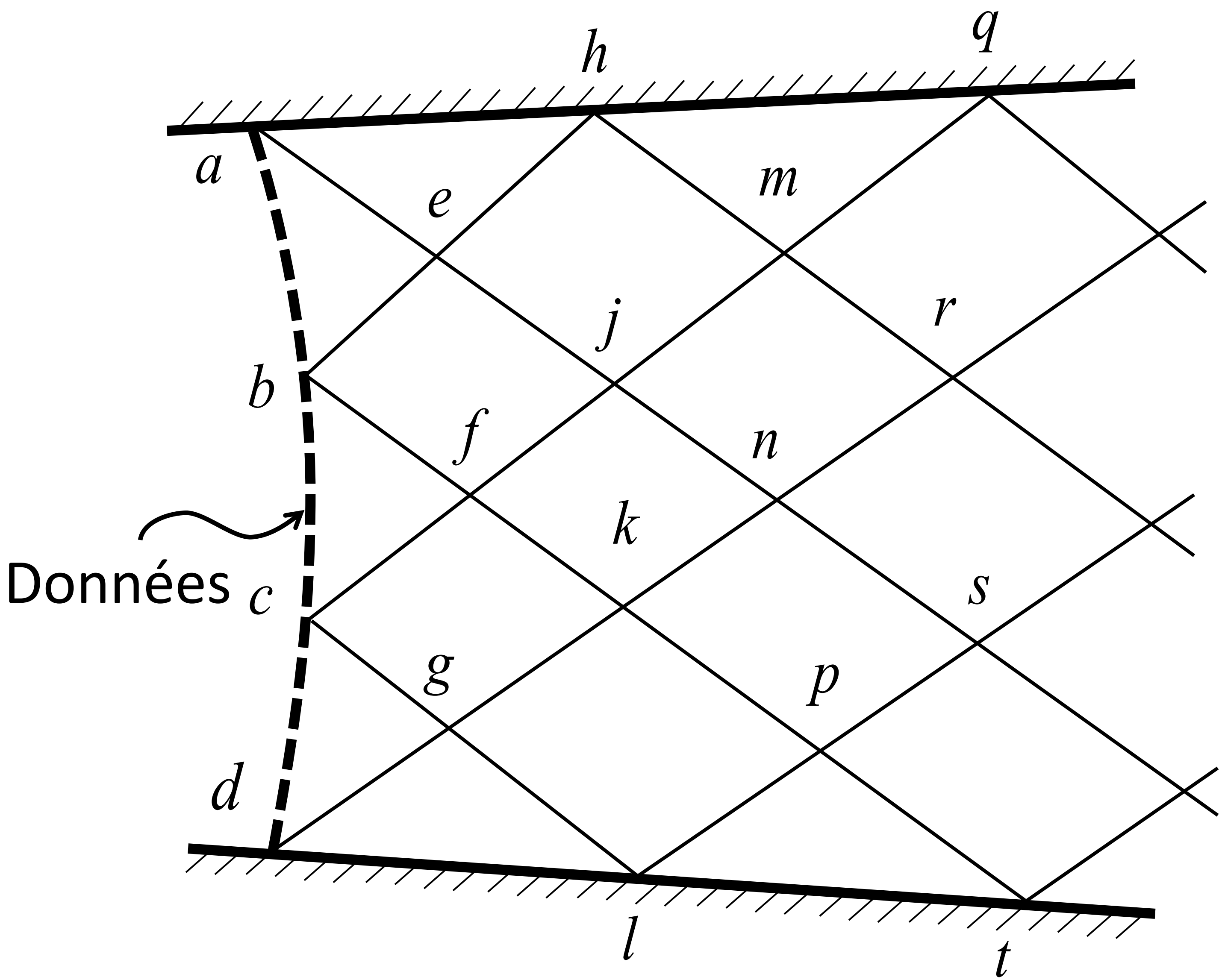


- Paroi

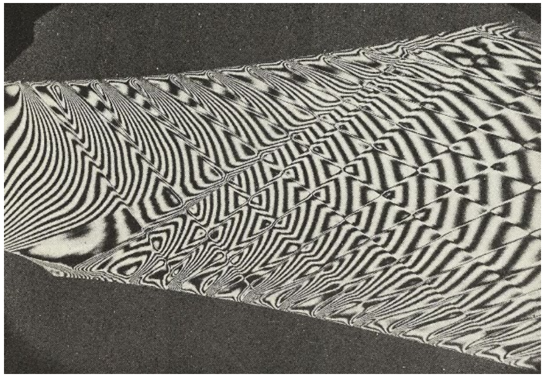


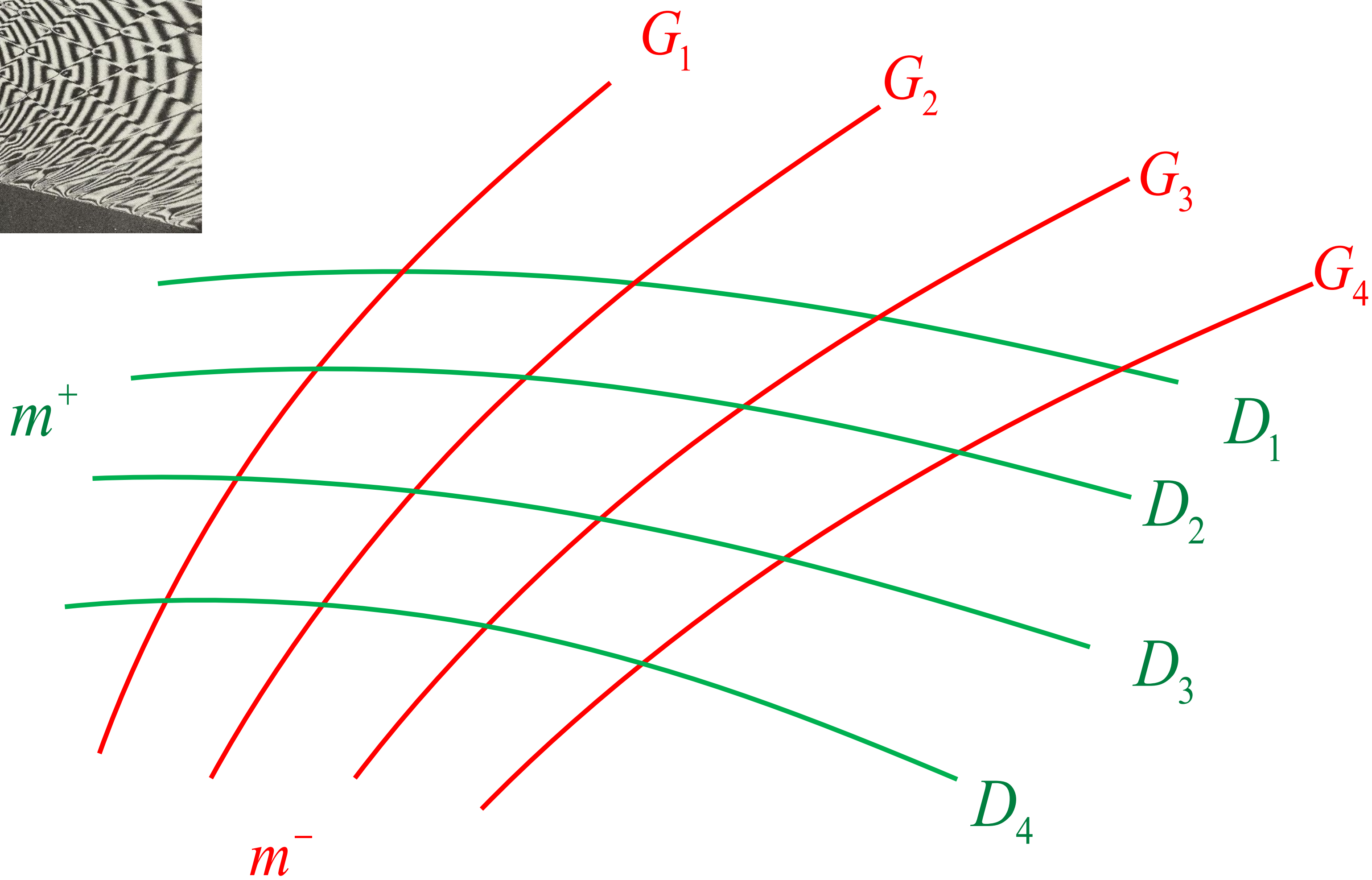
- Surface libre



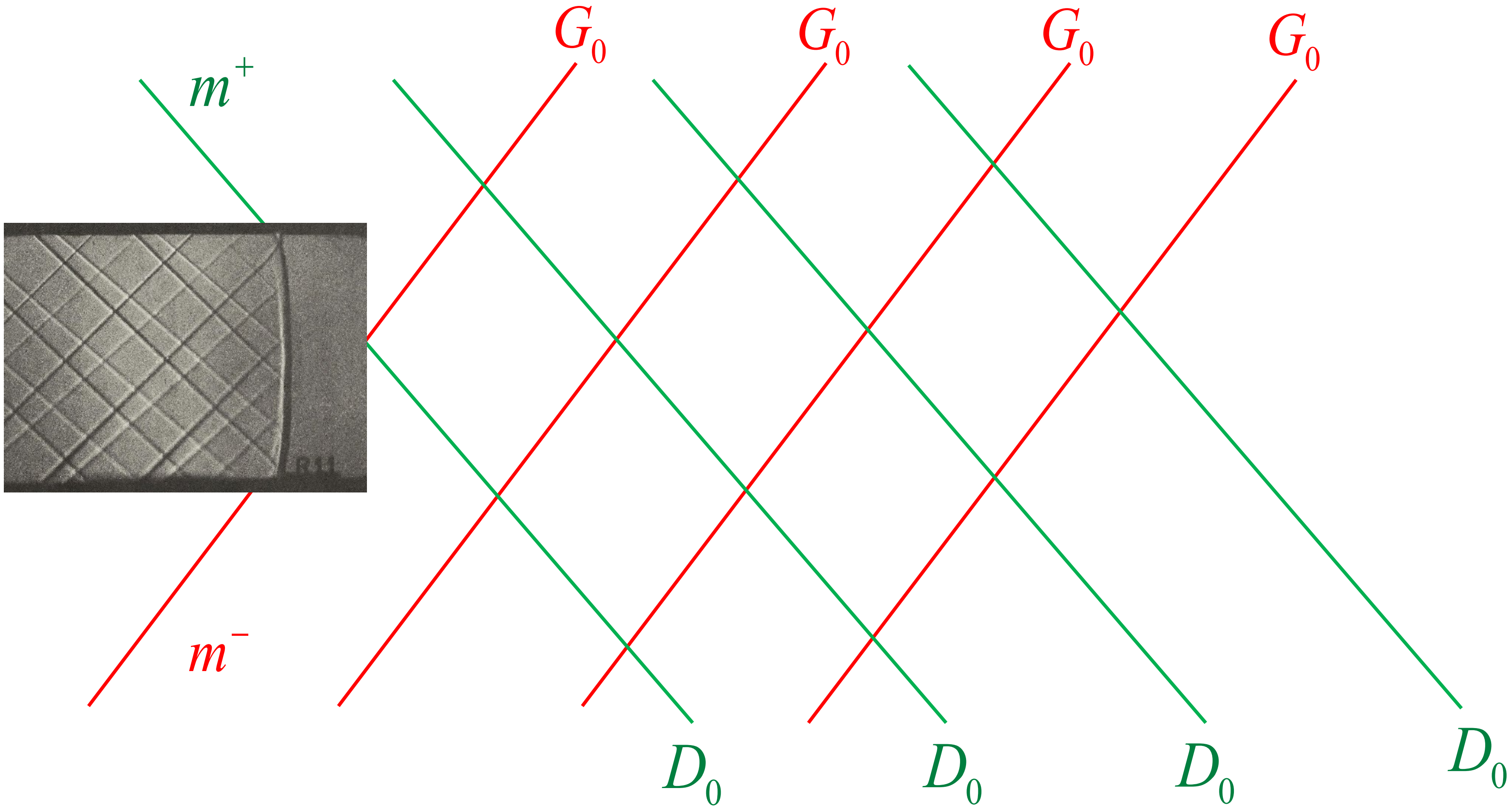

h
q
a
e
m
j
r
b
f
n
k
Données
c
s
g
p
d
l
t

Région non simple

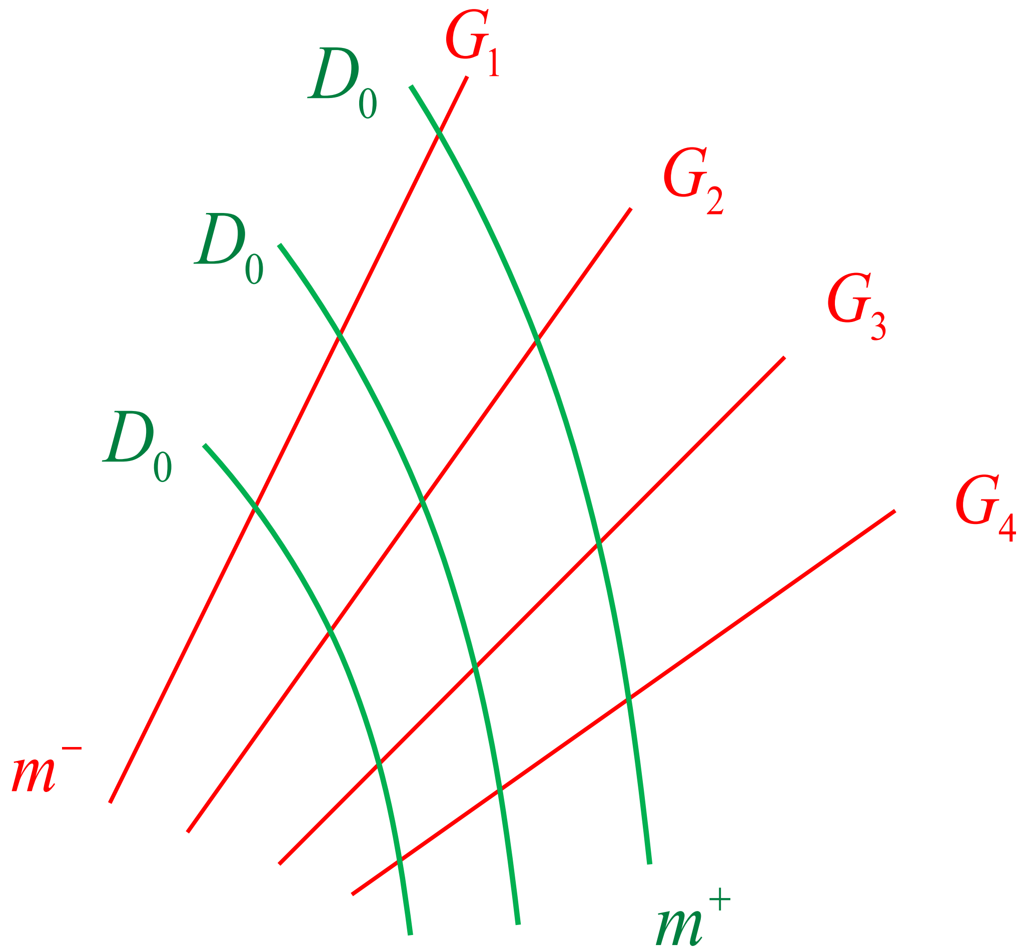




Région uniforme



Région simple



Région simple

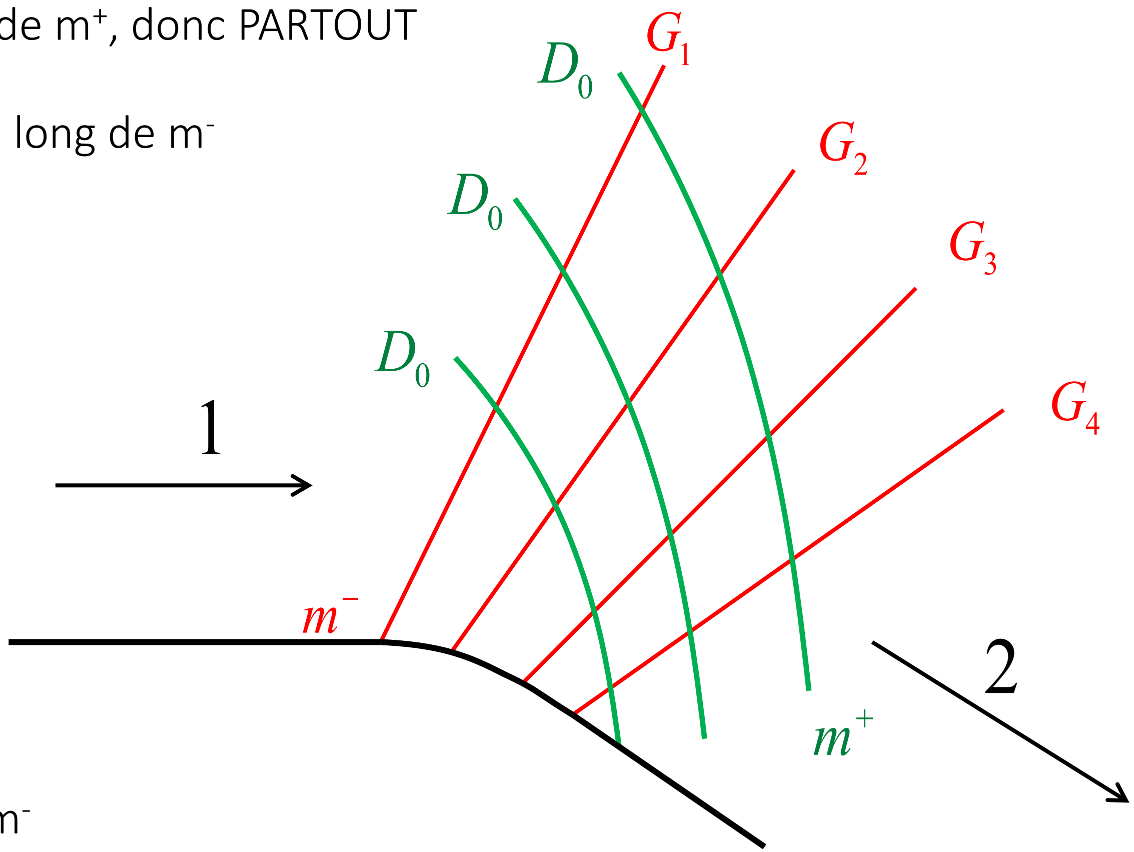
$$\vartheta + \nu = \nu_1 = \nu(M_1)$$ le long de m⁺, donc PARTOUT

$$\vartheta - \nu = const = 2\vartheta - \nu_1$$ le long de m⁻

- Donc, le long de m⁻

$$\vartheta = const$$

$$\nu = \nu_1 - \vartheta = const$$



- Les caractéristiques m⁻ sont des lignes droites

Région simple

$$\vartheta = const$$

le long de m^-

$$\nu = \nu_1 - \vartheta = const$$

M_1

➢ Méthode de résolution:

- On commence par G_1
- On évalue ϑ (= angle de la paroi)
- On évalue $\nu = \nu_1(M_1) - \vartheta$
- On évalue M (à partir de $\nu(M)$)
- On évalue l'angle de Mach μ à partir du nombre de Mach
- On évalue l'angle de la caractéristique G_1 $\vartheta + \mu$
- On recommence avec G_2